Студенческая интернет-олимпиада по математике 2016.

(III - IV курсы бакалавриата, магистратура)

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ РЕШЕНИЯ

1. Найти наименьшее значение функции $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ при условии $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Решение.

Введем функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - \lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - 1)$$

Найдем частные производные функции

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda; \\ \ldots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 2x_n - \lambda; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - 1) \end{cases}$$

Условный экстремум исходной функции определяется решением системы

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda = 0; \\ \ldots \\ 2x_n - \lambda = 0; \\ -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\lambda; \\ \ldots \\ x_n = \dfrac{1}{2}\lambda; \\ n \cdot \dfrac{1}{2}\lambda - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{n}; \\ \ldots \\ x_n = \dfrac{1}{n}; \\ \lambda = \dfrac{2}{n} \end{cases}$$

Проверим, что найденная точка является точкой минимума. Составим матрицу Гессе из вторых производных функции , вычисленных в стационарной точке

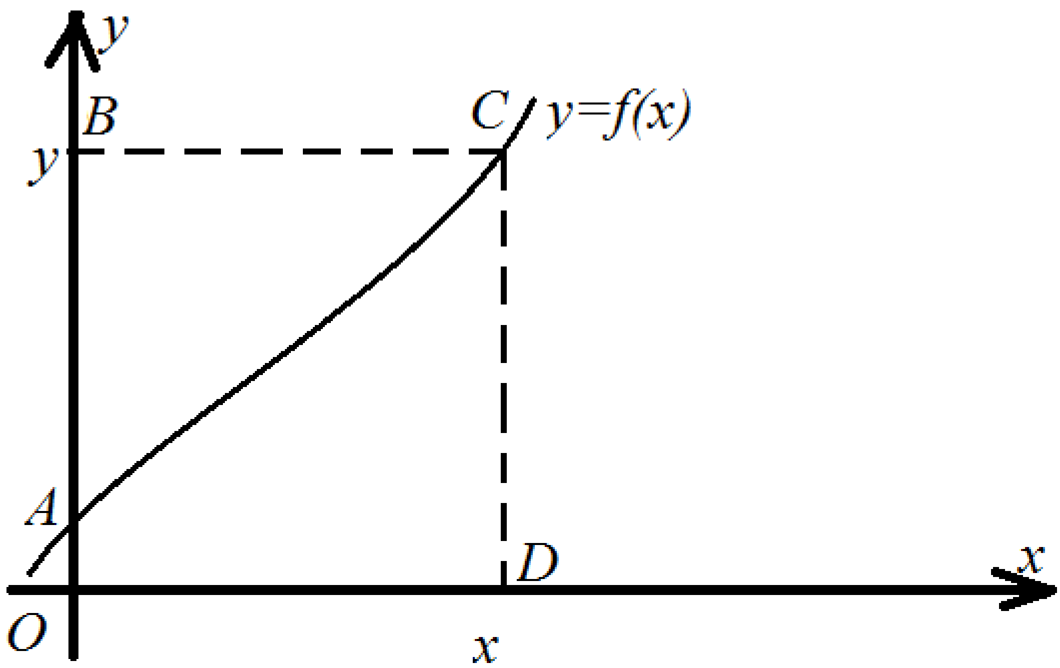
$$\begin{pmatrix} \frac{2}{n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & .. & .. \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{2}{n} \end{pmatrix}$$

Поскольку все диагональные элементы матрицы положительны, то $\left(\dfrac{1}{n};\ldots;\dfrac{1}{n}\right)$ – точка минимума. Наименьшее значение функции равно $n \cdot \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}$.

ОТВЕТ: $\frac{1}{n}$.

2. Найти уравнение кривой $y = f(x)$, зная, что площадь S_{ABC}, заключенная между осью OY, этой кривой и перпендикуляром, опущенным из произвольной точки кривой C на ось ординат, равна 1/3 площади прямоугольника $OBCD$ (A точка пересечения графика $y = f(x)$ с осью OY, B - проекция C на ось OY, D - проекция C на ось OX).

Решение.



По условию $S_{ABC} = \frac{1}{3} S_{OBCD}$, тогда $S_{OACD} = \frac{2}{3} S_{OBCD}$.

$S_{OACD} = \int\limits_0^x f(t)dt$; $S_{OBCD} = x \cdot f(x)$, тогда

$\int\limits_0^x f(t)dt = \frac{2}{3} x \cdot f(x)$.

Продифференцируем обе части последнего равенства:

$f(x) = \frac{2}{3}\left(f(x) + x \cdot f'(x)\right)$.

Решаем полученное дифференциальное уравнение

$$f(x) = 2x \cdot f'(x) \quad \Rightarrow \quad y = 2xy' \quad \Rightarrow \quad \frac{2xdy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad 2\ln y = \ln x + \ln c \quad \Rightarrow \quad y^2 = cx$$

ОТВЕТ: $y^2 = cx$.

3. Доказать, что функция $y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$ является монотонно возрастающей.

Решение. Функция $y = e^{x^2}$ непрерывна как композиция двух непрерывных функций, функция $y = \int_0^x e^{-t^2}dt$ непрерывна как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Функция $y = x^2 \cdot \int_0^x e^{-t^2}dt$ непрерывна как произведение непрерывных функций.

Найдем производную функции

$$y' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot \int_0^x e^{-t^2}dt + x^2 e^{-x^2} = xe^{x^2}\left(2\int_0^x e^{-t^2}dt + xe^{-2x^2}\right)$$

Поскольку $x > 0$, то $y' > 0$. Следовательно, функция $y = x^2 \cdot \int_0^x e^{-t^2}dt$ монотонно возрастает.

4. Вычислить интеграл

$$\oint\left(y \cdot x^{y-1} - 3\cos y \cdot e^x + \cos x\right)dx + \left(x^y \ln x + 3\sin y \cdot e^x - \frac{1}{\cos^2 y}\right)dy$$, где $L: x^6 + y^6 = 1$.

Решение. Используем формулу Грина

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D_L}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial\left(y \cdot x^{y-1} - 3\cos y \cdot e^x + \cos x\right)}{\partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x + 3\sin y \cdot e^x$$

$$\frac{\partial\left(x^y \ln x + 3\sin y \cdot e^x - \frac{1}{\cos^2 y}\right)}{\partial x} = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} + 3\sin y \cdot e^x$$

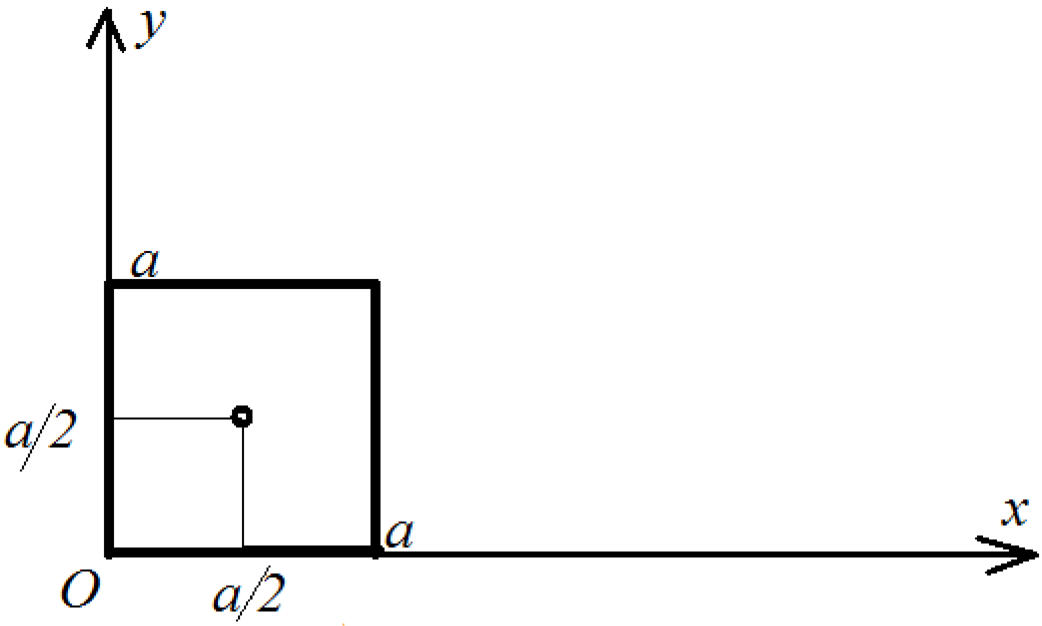
Тогда по формуле Грина

$$\oint\left(y\cdot x^{y-1}-3\cos y\cdot e^{x}+\cos x\right)dx+\left(x^{y}\ln x+3\sin y\cdot e^{x}-\frac{1}{\cos^{2}y}\right)dy=$$

$$\iint\limits_{D_L}\left(y\cdot x^{y-1}\ln x+x^{y}\cdot\frac{1}{x}+3\sin y\cdot e^{x}-\left(y\cdot x^{y-1}\ln x+x^{y-1}+3\sin y\cdot e^{x}\right)\right)=0$$

5. Найти массу квадратной пластинки со стороной a, если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от одной из вершин квадрата и равна ρ_0 в центре квадрата.

Решение. Найдем функцию плотности. Введем систему координат так, чтобы начало координат располагалось в одной из вершин квадрата, а оси направлены по сторонам квадрата.



Тогда значение функции плотности в точке (x, y) определяется по формуле

$\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

Поскольку в центре квадрата плотность равна ρ_0, то

$$k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\rho_0$$

Тогда коэффициент пропорциональности

$$k=\frac{\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}\rho_0}{a}$$

Запишем уравнение прямой $x = a$ в полярной системе координат:

$r\cos\varphi = a;\ \ r = \dfrac{a}{\cos\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}.$

Найдем массу пластины.

$$M = \iint\limits_D \rho(x,y)dS = k\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dS$$

В силу симметрии подынтегральной функции и области интегрирования относительно прямой $y = x$, получим

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dS = 2\iint\limits_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}\,dS$$

где D_1 – область, ограниченная осью OX, прямыми $y = x$ и $x = a$.

$$\iint\limits_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}\,dS = \iint\limits_{D_1} r\cdot r dr d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} r^2 dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{a}{\cos\varphi}\right)^3 d\varphi = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\varphi}d\varphi = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi}{\left(1-\sin^2\varphi\right)^2}d\varphi =$$

$$= \left|\begin{array}{c} t = \sin\varphi \\ dt = \cos\varphi\, d\varphi \\ \varphi = 0 \to t = 0 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} \to t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\left(1-t^2\right)^2}dt = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-t^2}{\left(1-t^2\right)^2}dt + \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t^2}{\left(1-t^2\right)^2}dt =$$

$$= \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t^2}dt + \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\left(1-t^2\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)d\left(1-t^2\right) =$$

$$= \frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{a^3}{6}\left(-\frac{t}{1-t^2}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{1-t^2}dt\right) =$$

$$== \frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right| + \frac{a^3\sqrt{2}}{6} - \frac{a^3}{12}\ln\left|\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right| = \frac{a^3}{12}\ln\left|\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right| + \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Таким образом,

$$M=\frac{2\sqrt{2}\rho_0}{a}\left(\frac{a^3}{12}\ln\left|\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right|+\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\right)=\rho_0\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{6}\ln\left|\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right|+\frac{2a^2}{3}\right)$$

6. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

Решение. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^{n+1}}$$

Применяя теорему о дифференцировании и интегрировании рядов, получим:

$$\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^{n+1}}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{n}{x^{n+1}}dx=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{x^{-n}}{-n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x-1}.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^{n+1}}=\left(-(x-1)^{-1}\right)'=\frac{1}{(x-1)^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^{n+1}}=x\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$

Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}$. Аналогично предыдущим рассуждениям, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^{n+1}}$$

$$\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^{n+1}}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{n^2}{x^{n+1}}dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\frac{x^{-n}}{-n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=-\frac{x}{(x-1)^2}.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^{n+1}}=\left(-\frac{x}{(x-1)^2}\right)'=-\frac{(x-1)^2-x\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{x-1-2x}{(x-1)^3}=\frac{x+1}{(x-1)^3}$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^{n+1}}=x\cdot\frac{x+1}{(x-1)^3}=\frac{x^2+x}{(x-1)^3}.$$

Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=\frac{3^2+3}{(3-1)^3}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$.

7. В жюри из трех человек два члена независимо друг от друга принимают правильные решения с вероятностью p, а третий член для вынесения приговора бросает монету. Окончательное решение выносится большинством голосов. Жюри из одного человека выносит справедливое решение с вероятностью p. Какое из этих жюри выносит справедливое решение с большей вероятностью?

Решение. Введем события

A_i ={i-ый член жюри принял верное решение}, i=1,2,3 ,

B ={ жюри приняло верное решение}.

Тогда для жюри из трех человек

$$B = A_1 A_2 A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} .$$

Поскольку события-слагаемые несовместны, а события-сомножители независимы, то

$$P(B) = p \cdot p \cdot 0{,}5 + (1 - p) \cdot p \cdot 0{,}5 + p \cdot (1 - p) \cdot 0{,}5 + p \cdot p \cdot 0{,}5 =$$

$$= 0{,}5p^2 + 0{,}5p - 0{,}5p^2 + 0{,}5p - 0{,}5p^2 + 0{,}5p^2 = p$$

Ответ: жюри из трех человек и жюри из одного человека принимают верное решение с одинаковой вероятностью.