ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ДЛЯ СТУДЕНТОВ 2-ЫХ КУРСОВ 2016
Примерный вариант решения.

1. Вычислить $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int\limits_0^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2 x}d(\cos x)=-\left(x\cdot arctg(\cos x)\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}arctg(\cos x)dx\right)=$$

$$=-\pi\cdot arctg(\cos\pi)-\int\limits_0^{\pi}arctg(\cos x)dx=-\pi\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\int\limits_0^{\pi}arctg(\cos x)dx$$

Рассмотрим функцию $y=arctg(\cos x)$ на промежутке $[0;\pi]$.

Поскольку $arctg\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=-arctg\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)$, то площади фигур, ограниченных графиком функции $y=arctg(\cos x)$, осью OY на промежутках $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ равны по величине. Значения рассматриваемой функции на указанных промежутках противоположны, следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi}arctg(\cos x)dx=0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\int\limits_0^{\pi}arctg(\cos x)dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right),\qquad x^2+y^2\le a^2.$$

Решение. Запишем уравнения кривых в полярной системе координат

1) $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$,

$\left(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\right)^2=2a^2\left(r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi\right)$

$r^4=2a^2r^2\cos 2\varphi$

$r^2=2a^2\cos 2\varphi$

$r=\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}$

2) $x^2+y^2=a^2$

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=a^2$

$r^2=a^2$

$r=a$

Найдем касательные к кривой $r=\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}$:

$\cos 2\varphi\geq 0$

$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq 2\varphi\leq\frac{\pi}{2}+2\pi n$

$-\frac{\pi}{4}+\pi n\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}+\pi n$

Асимптоты кривой: $\varphi=\pm\frac{\pi}{4};\pm\frac{3\pi}{4}$.

Найдем точки пересечения кривых

$$\begin{cases} r=a \\ r=\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi} \end{cases}$$

$\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}=a$

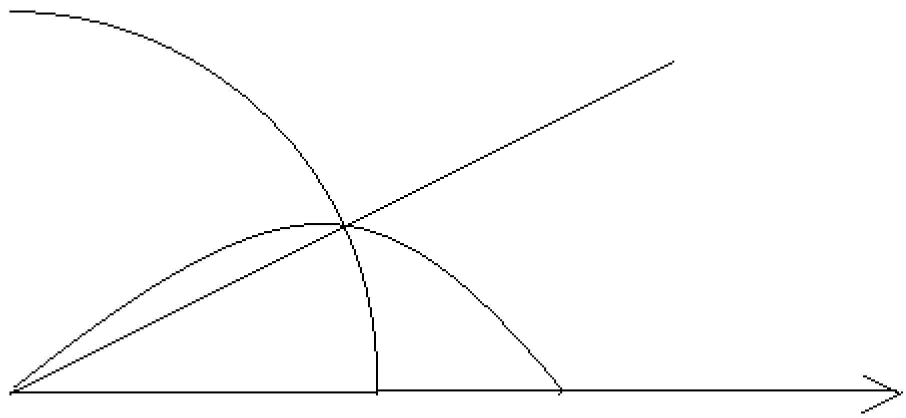
$\sqrt{2\cos 2\varphi}=1$

$\cos 2\varphi=0{,}5$

$2\varphi=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$

$\varphi=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$

$\varphi=\pm\frac{\pi}{6};\pm\frac{5\pi}{6}$



В силу симметрии фигуры, ограниченной указанными кривыми, получаем:

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(a)^2\,d\varphi+\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi\right)=2\left(a^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+2a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$=2\left(a^2\frac{\pi}{6}+a^2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)=a^2\frac{\pi}{3}+2a^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=a^2\left(\frac{\pi}{3}+2-\sqrt{3}\right)$$

3. Функция имеет непрерывные частные производные. Известно, что $f(0,0)=0$ и при $x^2+y^2\le 5$ выполняется условие $\left|\mathrm{grad}\, f\right|\le 1$. Доказать, что $f(1,2)\le\sqrt{5}$.

Решение. Известно, что для любого вектора $\vec{s}$ $\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}\right|\le\left|gradf\right|$.

Пусть $M=\max\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}\right|\right\}$ в направлении вектора $\vec{s}=\{1;2\}$. Тогда при

$x^2+y^2\le 5$

$$\left|f(x,y)\right|\le f(0;0)+\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}\right|\cdot\left|\vec{s}\right|\le f(0;0)+\left|gradf\right|\cdot\left|\vec{s}\right|=0+1\cdot\sqrt{5}.$$

Следовательно, $f(1,2)\le\sqrt{5}$.

4. Найти кратчайшее расстояние между графиками функций $y=e^{ax}$ и $y=\frac{\ln x}{a}$.

Решение. Графики функций $y=e^{ax}$ и $y=\frac{\ln x}{a}$ симметричны относительно прямой $y=x$. Следовательно, расстояние между графиками функции в два раза больше расстояния от одного из графиков до прямой $y=x$.

Расстоянием от графика функции до прямой является кратчайшее расстояние от точек графика до прямой. Очевидно, в точке, расстояние от которой до прямой наименьше, касательная будет параллельна прямой. Параллельность прямых определяется равенством их угловых коэффициентов, т.е.

$$\left(e^{ax}\right)' = 1$$

$$ae^{ax} = 1$$

$$e^{ax} = \frac{1}{a}$$

$$ax = \ln a^{-1}$$

$$x = -\frac{\ln a}{a}$$

При этом $y\left(-\frac{\ln a}{a}\right) = e^{a\left(-\frac{\ln a}{a}\right)} = a^{-1}$

Приведем уравнение прямой $y = x$ к нормальному виду

$$y = x \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = 0$$

Расстояние от точки $\left(-\frac{\ln a}{a}; \frac{1}{a}\right)$ графика функции $y = e^{ax}$ до прямой

$y = x$ будет равно $\frac{1}{\sqrt{2}a}\left|\ln a + 1\right|$ и будет минимальным.

5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

Решение. Представим дробь $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ в виде суммы простых дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

Значения неопределенных коэффициентом находим как решение системы

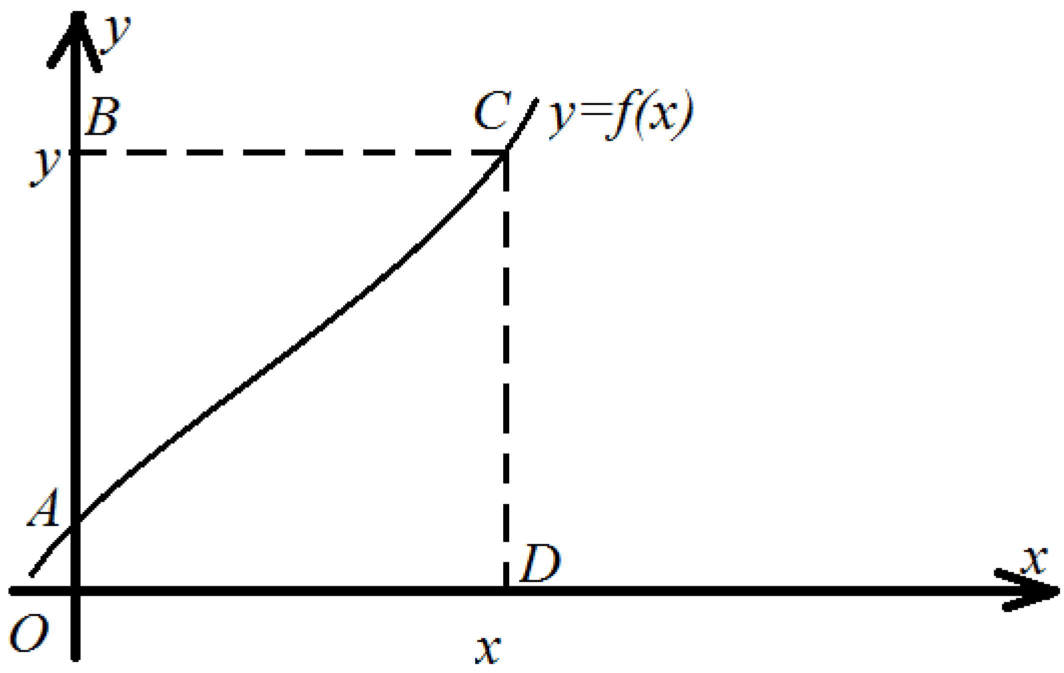
$$\begin{cases} 2A = 1; \\ -B = 1; \\ 2C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0{,}5; \\ B = -1; \\ C = 0{,}5 \end{cases}$$

Таким образом, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{0{,}5}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{0{,}5}{n+2}$;

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(0{,}5-\frac{1}{2}+\frac{0{,}5}{3}+\frac{0{,}5}{2}-\frac{1}{3}+\frac{0{,}5}{4}+\frac{0{,}5}{3}-\frac{1}{4}+\frac{0{,}5}{5}+\ldots+\frac{0{,}5}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{0{,}5}{n+2}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(0{,}5-\frac{1}{2}+\frac{0{,}5}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{0{,}5}{n+2}\right)=\frac{1}{4}$$

6. Найти уравнение кривой $y=f(x)$, зная, что площадь S_{ABC}, заключенная между осью OY, этой кривой и перпендикуляром, опущенным из произвольной точки кривой C на ось ординат, равна 1/3 площади прямоугольника $OBCD$ (A – точка пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью OY, B – проекция C на ось OY, D – проекция C на ось OX).

Решение.



По условию $S_{ABC}=\dfrac{1}{3}S_{OBCD}$, тогда $S_{OACD}=\dfrac{2}{3}S_{OBCD}$.

$S_{OACD}=\int\limits_0^x f(t)dt$; $S_{OBCD}=x\cdot f(x)$, тогда

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{2}{3}x \cdot f(x).$$

Продифференцируем обе части последнего равенства:

$$f(x) = \frac{2}{3}\left(f(x) + x \cdot f'(x)\right).$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение

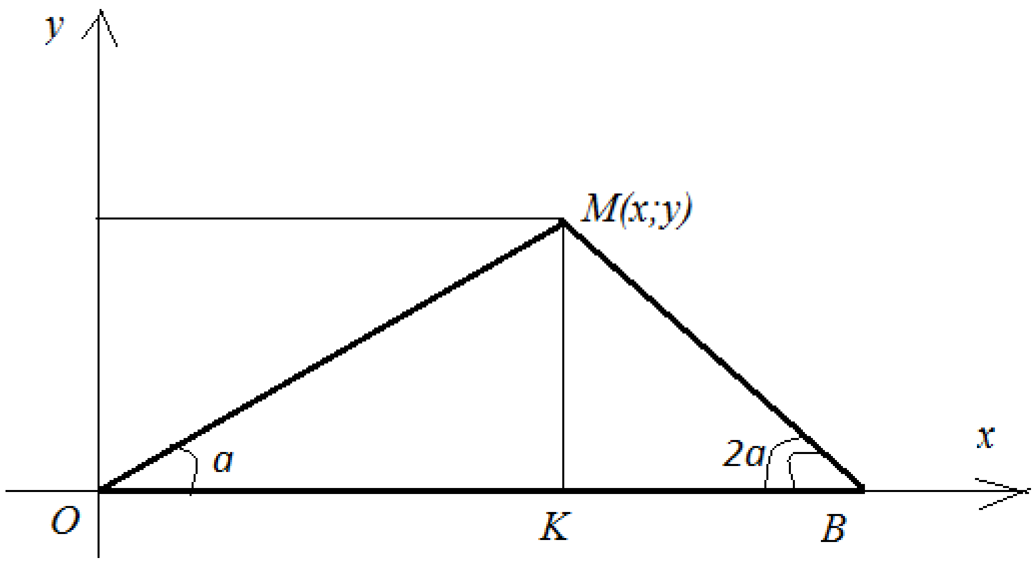
$$f(x) = 2x \cdot f'(x) \quad \Rightarrow \quad y = 2xy' \quad \Rightarrow \quad \frac{2xdy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad 2\ln y = \ln x + \ln c \quad \Rightarrow \quad y^2 = cx$$

ОТВЕТ: $y^2 = cx$.

7. Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании треугольника остается вдвое больше другого. Записать уравнение линии, которую описывает третья вершина?

Решение. Введем декартову систему координат следующим образом: совместим начало координат с одной из зафиксированных вершин (точка O), ось OX направим через вторую зафиксированную вершину (точка B). Третья вершина $M(x, y)$ будет находиться на искомой линии.



Пусть $OB = c$ (значение c известно, поскольку вершины O и B фиксированы).

Из треугольника OMK : $MK = KOtg\alpha \Leftrightarrow y = x \cdot tg\alpha$.

Из треугольника BMK : $MK = KDtg2\alpha \Leftrightarrow y = (c - x)tg2\alpha$.

Поскольку $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$, то получаем уравнение

$$\frac{y}{c-x} = \frac{2\dfrac{y}{x}}{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{c-x} = \frac{2yx}{x^2-y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-y^2 = 2x(c-x)$$

.

$$3x^2-y^2-2cx=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(x-\frac{c}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{c^2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(x-\dfrac{c}{3}\right)^2}{c^2/9} - \frac{y^2}{c^2/3} = 1$$

Ответ: $\dfrac{\left(x-\dfrac{c}{3}\right)^2}{c^2/9} - \dfrac{y^2}{c^2/3} = 1$.

8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Решение. Известно разложение в ряд Маклорена для функции

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \; x \in (-1;1]$$

Тогда

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x^n}{n}\right), \; x \in [-1;1)$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \ldots + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{2n-1}, \; x \in (-1;1)$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{2n-1}, \; x \in (-1;1).$$

Таким образом,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x - \frac{x^3}{3}, \; x \in (-1;1).$$