Пример решения заданий студенческой интернет-олимпиады 2014

3 КУРС ( и старше).

1. Пусть  – множество вещественных матриц  -го порядка. Укажите все значения , при которых существует матрица  такая, что , где  – единичная матрица.

Решение. Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц, то имеем: 

Следовательно, при нечетном значении  должно выполняться равенство , что невозможно, так как квадрат определителя матрицы – вещественное положительное число. Остается вариант  – четное число, тогда искомые матрицы существуют.

В качестве примера можно рассмотреть матрицу, все элементы имеют вид:



Тогда элемент  матрицы  при  имеет вид



при  имеет вид



Таким образом,  т.е. .

Пример подобной матрицы 4-го порядка:



2. Найти наименьшее значение *a*, при котором сумма  делится на 2015 при всех нечетных *n*.

Решение. Число 2015 можно разложить на множители 5 и 403. Сумма  будет делиться на 2015, если она будет делиться на 5 и на 403.

Преобразуем исходную сумму:

.

Поскольку 5 и 199 взаимно простые числа, то исходная сумма будет делиться на 5, если  будет кратно 5, т.е. .

С другой стороны,

.

Таким образом, поскольку 403 и 199 взаимно простые числа, исходная сумма будет делиться на 403, если  будет кратно 403, т.е. .

Равенство  возможно при наименьшем значении . Таким образом, наименьшее значение , при котором сумма  делится на 2015, равно 404.

3. Найти сумму ряда 

Решение.

.

4. Вычислить  .

Решение.



Первый интеграл в полученной разности равен 0 как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно 0 промежутку.

.

Таким образом,

.

5. Функция  является решением дифференциального уравнения  с начальным условием  . Пусть . Вычислить .

Решение.



6. Вычислить  .

Решение. 

Используя разложение в ряд Маклорена функции , получим:

.

7. Пусть λ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке [0;1]. Какова вероятность того, что из отрезков с длинами λ, 1–λ, ½ составится треугольник с тупым углом.

Решение. Пусть, для определенности , тогда сторона длины  - наибольшая. Треугольник будет тупоугольным (тупой угол напротив стороны длины ), если  и . Решением полученной системы неравенств, с учетом ограничения для , является промежуток .

Функция распределения НСВ  имеет вид:



Тогда вероятность того, что  будет принимать значения в промежутке , что равносильно тому, что треугольник будет тупоугольным, равна

.

8. Известно, что .Вычислить .

РЕШЕНИЕ:

Воспользуемся формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:



Вычисляем интеграл, применяя формулу интегрирования по частям и учитывая, что функция имеет больший порядок малости при , чем степенная функция:

