ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА 2016

Примерный вариант решения

1. Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство
$1^3+2^3+...+n^3=(1+2+...+n)^2$.

Решение. Проведем доказательство методом математической индукции.
Проверим верность равенства при $n=1$:
$1^3=1^3$ (верно).

Предположим, что равенство верно при $n=k$:
$1^3+2^3+...+k^3=(1+2+...+k)^2$
и покажем при этом условии его справедливость при $n=k+1$:
$1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^2=(1+2+...+(k+1))^2$.

Рассмотрим правую часть равенства:

$$\left(1+2+...k^2+(k+1)\right)^2=(1+2+...k)^2+2(1+2+...k)(k+1)+(1+k)^2=$$

$$=1^3+2^3+...+k^3+2\cdot\frac{1+k}{2}\cdot k(k+1)+(1+k)^2=$$

$$=1^3+2^3+...+k^3+k(1+k)^2+(1+k)^2=1^3+2^3+...+k^3+(1+k)^3$$

После преобразований получили левую часть исходного равенства.

Равенство доказано.

2. Найдите наибольший член последовательности $\left\{\frac{1000^n}{n!}\right\}$.

Решение. Найдем разность $(n+1)$ -го и n -го членов прогрессии:

$$\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{1000^n}{n!}=\frac{1000^n}{n!}\left(\frac{1000}{(n+1)}-1\right)=\frac{1000^n}{n!}\cdot\frac{999-n}{(n+1)}.$$

При $n<999$ разность положительна, следовательно, значения членов последовательности увеличиваются. При $n>999$ разность отрицательна, следовательно, значения членов последовательности уменьшаются. Следовательно, наибольшие члены последовательности получаем при $n=999$:

$$a_{999}=\frac{1000^{999}}{999!};\quad a_{1000}=\frac{1000^{1000}}{1000!}=\frac{1000^{999}\cdot 1000}{999!\cdot 1000}=\frac{1000^{999}}{999!}.$$

Ответ: $\frac{1000^{999}}{999!}$.

3. Найти матрицу X :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем предположение о виде матрицы, рассмотрев случаи $n = 2:3;4$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, элементы a_{ij} матрицы A^{-1} определяются равенством

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ -1, j = i+1, \\ 0, \textit{в остальных случаях} \end{cases}$$

или

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим истинность сделанного предположения. Найдем элемент c_{ij} матрицы $A^{-1}A$:

$$i < j: \quad c_{ij} = \underbrace{0 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot 1}_{i-1} + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + \underbrace{0 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot 1}_{j-i-1} + \underbrace{0 \cdot 0 \dots + 0 \cdot 0}_{n-j} = 0$$

$$i = j: \quad c_{ij} = \underbrace{0 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot 1}_{i-1} + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + \underbrace{0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0}_{n-i-1} = 1$$

$$i = j+1: \quad c_{ij} = \underbrace{0\cdot 1 + ... + 0\cdot 1}_{j} + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + \underbrace{0\cdot 0 + ... + 0\cdot 0}_{n-j-2} = 0$$

$$i > j: \quad c_{ij} = \underbrace{0\cdot 1 + ... + 0\cdot 1}_{j} + \underbrace{0\cdot 0 + ... + 0\cdot 0}_{i-1-j} + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + \underbrace{0\cdot 0 ... + 0\cdot 0}_{n-i-1} = 0$$

Таким образом,

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, \textit{в остальных случаях} \end{cases}$$

или $A^{-1} \cdot A = E$.

Обозначим

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 0 & 1 & 2 & ... & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & n-2 \\ \multicolumn{5}{l}{.......................} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$b_{ij} = \begin{cases} j - i + 1, i \le j, \\ 0, i > j \end{cases}.$$

Найдем матрицу X :

$$i < j: \quad x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = 1\cdot b_{ij} + (-1)\cdot b_{(i+1)\,j} = 1\cdot (j - i + 1) + (-1)\cdot (j - i) = 1;$$

$$i = j: \quad x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = 1\cdot b_{ij} + (-1)\cdot b_{(i+1)\,j} = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 = 1;$$

$$i < j: \quad x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = 1\cdot b_{ij} + (-1)\cdot b_{(i+1)\,j} = 1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 = 0$$

или

$$X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0\\ \dots\dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1\\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2\\ \dots\dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1\\ \dots\dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

Решение. Представим дробь $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ в виде суммы простых дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}=\frac{A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

Значения неопределенных коэффициентом находим как решение системы

$$\begin{cases}2A=1;\\ -B=1;\\ 2C=1\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}A=0{,}5;\\ B=-1;\\ C=0{,}5\end{cases}$$

Таким образом, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{0{,}5}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{0{,}5}{n+2}$; тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(0{,}5-\frac{1}{2}+\underline{\frac{0{,}5}{3}}+\frac{0{,}5}{2}-\frac{1}{\underline{3}}+\underline{\underline{\frac{0{,}5}{4}}}+\underline{\frac{0{,}5}{3}}-\frac{1}{\underline{\underline{4}}}+\frac{0{,}5}{\underset{\approx}{5}}+\dots+\frac{0{,}5}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{0{,}5}{n+2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(0{,}5-\frac{1}{2}+\frac{0{,}5}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{0{,}5}{n+2}\right)=\frac{1}{4}$$

5. Построить график функции $y=arcctg(\cos x)$.

Решение. Область определения функции – все множество действительных чисел. Множество значений – отрезок $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$. Функция является периодической с периодом 2π.

Исследуем функцию на монотонность:

$$y' = \frac{\sin x}{1+(\cos x)^2};$$

$$y' > 0 \quad при \quad x \in (0;\pi)$$

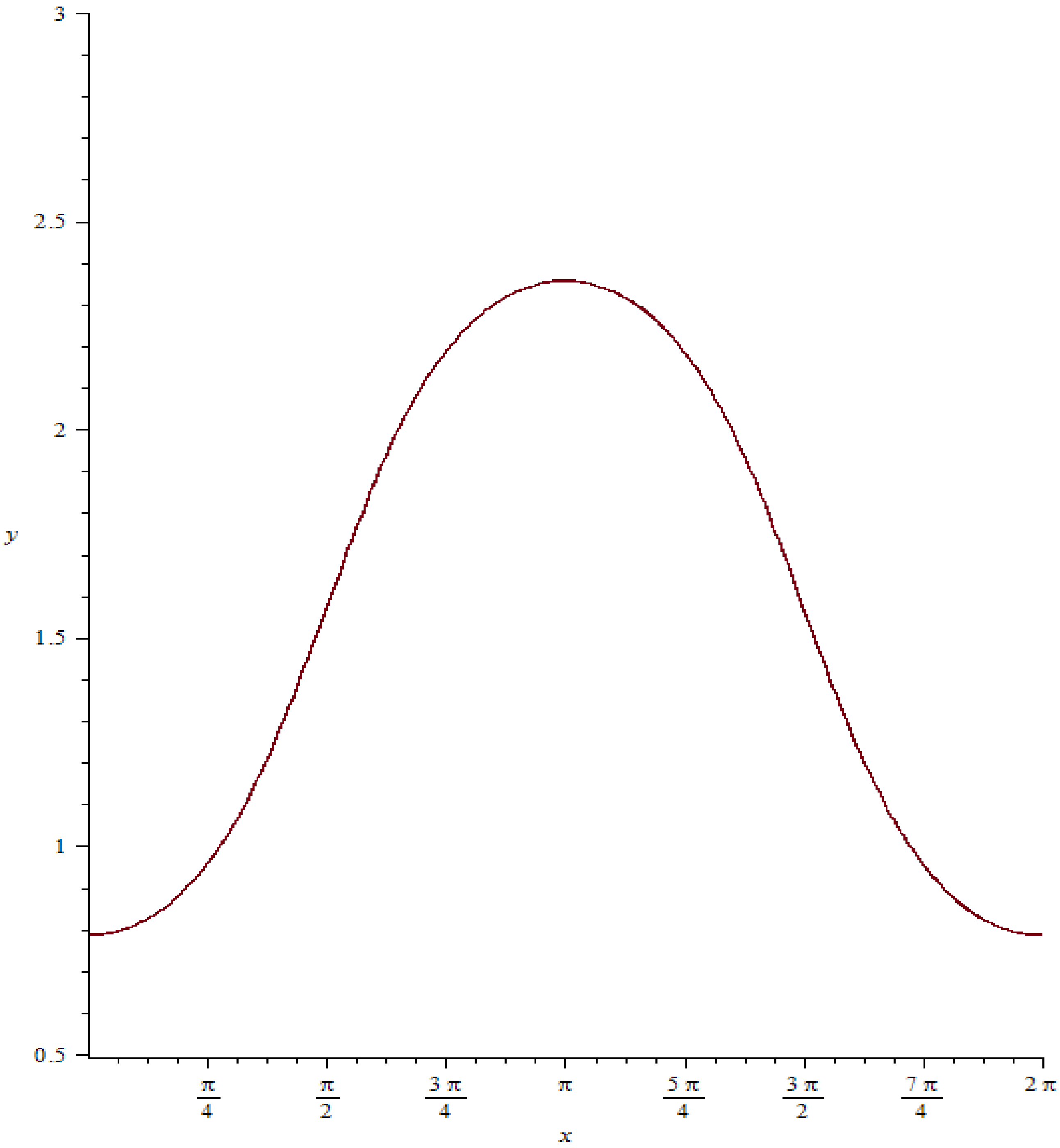
$$y' < 0 \quad при \quad x \in (\pi;2\pi)$$

Исследуем функцию на выпуклость:

$$y'' = \frac{\cos x \cdot \left(1+(\cos x)^2\right) + 2\sin^2 x \cdot \cos x}{\left(1+(\cos x)^2\right)^2} = \frac{\cos x \cdot \left(2+\sin^2 x\right)}{\left(1+(\cos x)^2\right)^2};$$

$$y'' > 0 \quad при \quad x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$$

$$y' < 0 \quad при \quad x \in \left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$$



6. Доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;b]$, то функции $m(x) = \inf\limits_{a \le \xi \le x} \{f(\xi)\}$ и $M(x) = \sup\limits_{a \le \xi \le x} \{f(\xi)\}$ также непрерывны на $[a;b]$.

Решение. Проведем решение для случая $m(x) = \inf\limits_{a \le \xi \le x} \{f(\xi)\}$.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значения (точной верхней и точной нижней грани).

Если функция возрастает на $[a;b]$, то $m(x) = \inf\limits_{a \le \xi \le x} \{f(\xi)\} = f(a) = const$, т.е. непрерывна.
Если функция убывает на $[a;b]$, то $m(x) = \inf\limits_{a \le \xi \le x} \{f(\xi)\} = f(x)$, т.е. непрерывна.

Таким образом, рассматриваемая функция является непрерывной стыковкой константы и непрерывной функции, т.е. непрерывной функцией.

7. Найти производную неявно заданной функции $y^x + x^y = 10$.

Решение.

Поскольку $\left((f(x))^{g(x)}\right)' = (f(x))^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x)\right)$, то дифференцируя обе части равенства по x, получим

$$y^x \cdot \left(\ln y + \frac{x}{y} \cdot y'\right) + x^y\left(\ln x + \frac{y}{x}\right) = 0$$

Откуда

$$y^x \cdot \ln y + y^x \cdot \frac{x}{y} \cdot y' + x^y \ln x + x^y \frac{y}{x} = 0;$$

$$y' = -\frac{y^x \cdot \ln y + x^{y-1} \cdot y + x^y \ln x}{y^{x-1} \cdot x}.$$

8. Найдите все значения параметра a, при которых данная система уравнений имеет три решения

$$\begin{cases} \left|4y - |x| - 8\right| + |2x| = 16; \\ x^2 + y^2 + 2y + 1 = a \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$|4y-|x|-8|+|2x|=16 \quad \leftrightarrow \begin{cases} 16-|2x|\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 4y-|x|-8=16-|2x| \\ 4y-|x|-8=-(16-|2x|) \end{array}\right. \end{cases} \quad \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0 \\ 16-2x\ge 0 \\ y=\dfrac{24-x}{4} \\ y=\dfrac{3x-8}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ 16+2x\ge 0 \\ y=\dfrac{24+x}{4} \\ y=\dfrac{-3x-8}{4} \end{cases} \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0 \\ x\le 8 \\ y=\dfrac{24-x}{4} \\ y=\dfrac{3x-8}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x\ge -8 \\ y=\dfrac{24+x}{4} \\ y=\dfrac{-3x-8}{4} \end{cases} \end{array}\right.$$

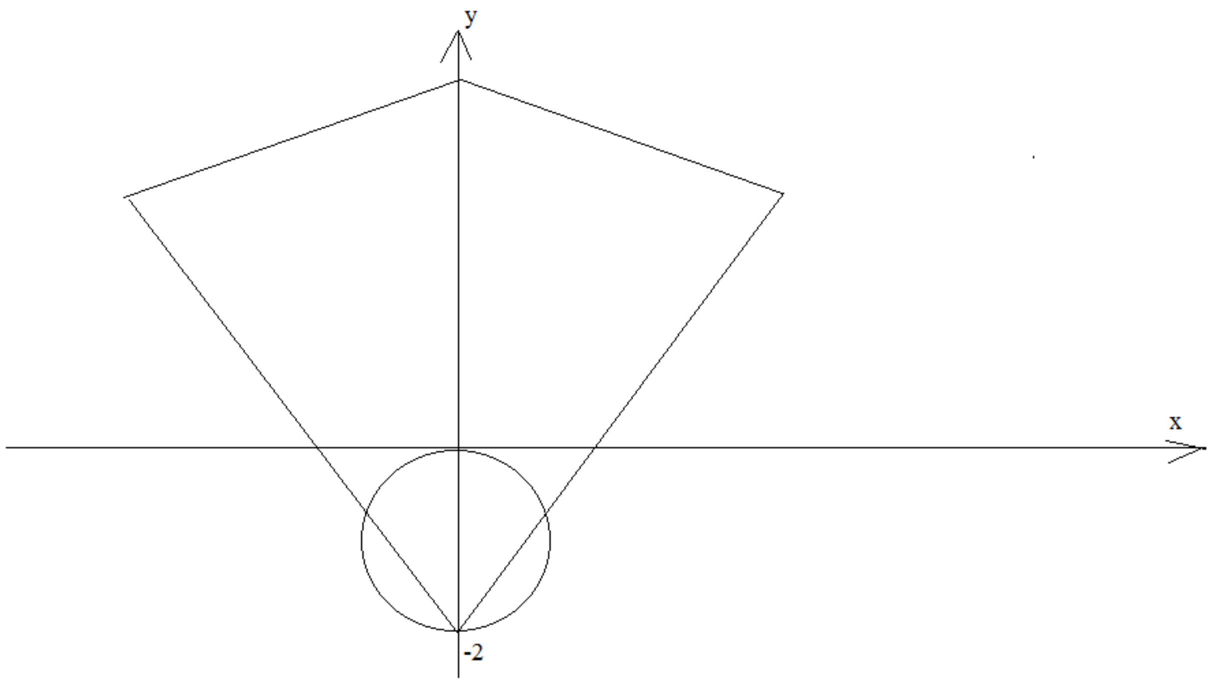
Преобразуем второе уравнение системы:

$x^2+y^2+2y+1=a \quad \leftrightarrow \quad x^2+(y+1)^2=a$.

Второе уравнение при $a>0$ определяет множество окружностей с центром в точке $(0;-1)$ и радиусом $\sqrt{a}$.

Построим линию, определяемую первым уравнением системы.

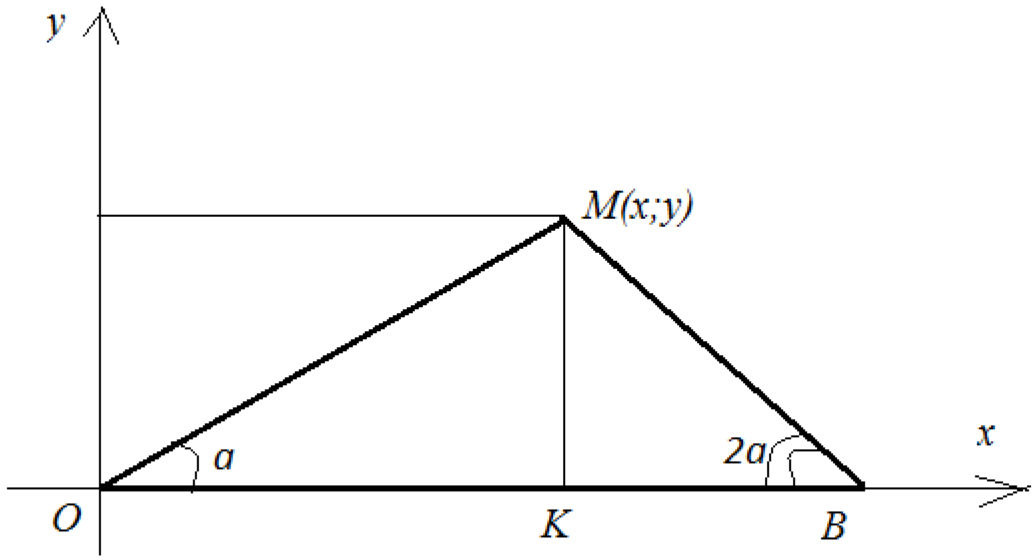
В силу симметрии построенной линии и окружностей относительно оси система будет иметь нечетное число решений, если окружность пересекает линию в точках . Три корня будет в случае пересечения в точке , т.е. при $\sqrt{a}=1$.



Ответ: $a = 1$.

9. Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании треугольника остается вдвое больше другого. Записать уравнение линии, которую описывает третья вершина?

Решение. Введем декартову систему координат следующим образом: совместим начало координат с одной из зафиксированных вершин (точка O), ось OX направим через вторую зафиксированную вершину (точка B). Третья вершина $M(x, y)$ будет находиться на искомой линии.



Пусть $OB = c$ (значение c известно, поскольку вершины O и B фиксированы).
Из треугольника OMK : $MK = KOtg\alpha \Leftrightarrow y = x \cdot tg\alpha$.
Из треугольника BMK : $MK = KDtg2\alpha \Leftrightarrow y = (c - x)tg2\alpha$.
Поскольку $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$, то получаем уравнение

$$\frac{y}{c-x} = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{y}{c-x} = \frac{2yx}{x^2 - y^2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2x(c-x)$$
.

$$3x^2 - y^2 - 2cx = 0 \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{c}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{c^2}{3} \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{c}{3}\right)^2}{c^2/9} - \frac{y^2}{c^2/9} = 1$$

Ответ: $\dfrac{\left(x - \frac{c}{3}\right)^2}{c^2/9} - \dfrac{y^2}{c^2/9} = 1.$

10. Найти кратчайшее расстояние между графиками функций $y = e^{ax}$ и $y = \dfrac{\ln x}{a}$.

Решение. Графики функций $y = e^{ax}$ и $y = \dfrac{\ln x}{a}$ симметричны относительно прямой $y = x$. Следовательно, расстояние между графиками функции в два раза больше расстояния от одного из графиков до прямой $y = x$.
Расстоянием от графика функции до прямой является кратчайшее расстояние от точек графика до прямой. Очевидно, в точке, расстояние от которой до прямой наименьше, касательная будет параллельна прямой. Параллельность прямых определяется равенством их угловых коэффициентов, т.е.

$$\left(e^{ax}\right)' = 1$$

$$ae^{ax} = 1$$

$$e^{ax} = \frac{1}{a}$$

$$ax = \ln a^{-1}$$

$$x = -\frac{\ln a}{a}$$

При этом $y\left(-\frac{\ln a}{a}\right) = e^{a\left(-\frac{\ln a}{a}\right)} = a^{-1}$

Приведем уравнение прямой $y = x$ к нормальному виду

$$y = x \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = 0$$

Расстояние от точки $\left(-\frac{\ln a}{a}; \frac{1}{a}\right)$ графика функции $y = e^{ax}$ до прямой $y = x$ будет равно $\frac{1}{\sqrt{2}a}\left|\ln a + 1\right|$ и будет минимальным.